

## FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ TABAKA VE YARIM DÜZLEM ARASINDAKİ SÜRTÜNMESİZ VE AYRILMALI TEMAS PROBLEMİ

Pembe Merve Karabulut<sup>1</sup>, Murat Yaylacı<sup>2</sup> ve Ahmet Birinci<sup>3</sup>

<sup>1,3</sup>Yazar1-3 Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon

<sup>2</sup>Yazar2 Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi, Rize

### ABSTRACT

In this study, the receding contact problem between a functionally graded layer and a homogeneous half space is considered using elasticity theory. The layer is pressed by two rectangular rigid stamps placed symmetrically. Shear modulus of the layer is assumed to vary exponentially through the thickness of the layer. The problem is reduced to a system of singular integral equations in which half contact length and contact pressures are unknowns using boundary conditions and integral transform techniques. The system is solved numerically using Gauss-Jacobi integration formulation. Finally, the dimensionless quantities for the contact length and the contact pressures are calculated for various material properties and stamp positions.

### ÖZET

Bu çalışmada, fonksiyonel derecelendirilmiş tabaka ile homojen yarım düzlem arasındaki sürtünmesiz ve ayrılmalı temas problemi elastisite teorisine göre incelenmiştir. Fonksiyonel derecelendirilmiş tabaka simetrik rijit iki dikdörtgen blok aracılığıyla yüklenmiştir. Fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın kayma modülünün tabaka yüksekliğiyle eksponansiyel olarak değiştiği kabul edilmiştir. Problem integral dönüşüm teknikleri ve sınır şartları kullanılarak; yarı temas uzunlukları ve temas gerilmelerinin bilinmeyenler olduğu bir integral denklem sistemine indirgenmiştir. İntegral denklem sistemi Gauss-Jacobi integrasyon formülasyonu kullanılarak sayısal olarak çözülmüştür. Son olarak, boyutsuz temas gerilmeleri ve temas uzunluklarının malzeme özelliklerine ve blokların simetri ekseninden olan uzaklıklarına göre değişimi incelenmiştir.

### GİRİŞ

Havacılık, uzay, savunma ve otomotiv gibi endüstrilerdeki hızlı teknolojik gelişim ve artan rekabet, yüksek performansa sahip ürünlerin tasarlanması ihtiyacını gerektirmiş ve dolayısıyla da bu durumda hafif ama aynı zamanda mukavemeti yüksek malzemelere olan ihtiyacı ortaya koymaktadır. Malzeme biliminin ilerlemesiyle malzeme özelliklerinin malzeme içerisinde konuma bağlı olarak değiştirilebildiği üretim yöntemleri geliştirilmiştir. Bu şekilde üretilen malzemeler genel olarak FDM (Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzeme) olarak isimlendirilmektedir.

Mühendislik uygulamalarında son zamanlarda kullanılmaya başlanan FDM kaplamaların mekanik yüklemeler altında gerilme dağılımlarının ve davranışlarının belirlenmesi ile ilgili analitik [9,10, 14,18] ve hesaplamalı [1,3,4] yöntemler kullanılarak son yıllarda yapılmış pek çok çalışma mevcuttur. Bunlardan bazıları aşağıdaki gibi özetlenebilir.

El-Borgi ve diğerleri [5] homojen yarım düzlem üzerine oturan ve yayılı yük ile bastırılan fonksiyonel derecelendirilmiş bir tabakanın ayrılmalı temas problemini incelemişlerdir. Fonksiyonel derecelendirilmiş bir tabakanın eksenel simetrik temas problemi Henkel integral dönüşümü kullanılarak Rhimi ve diğerleri [6] tarafından araştırılmıştır. Choi [7] alt yüzeyinden rijit düzleme bağlı ve dikdörtgensel blok aracılığıyla yüklenmiş fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın sürtünmeli temas problemini incelemiştir. Dağ ve diğerleri [8] yüzey çatlağı bulunan fonksiyonel derecelendirilmiş tabaka ve yarım düzlemin sürtünmeli temas problemini ele almışlardır. Chidlow and Teodorescu [11] fonksiyonel derecelendirilmiş tabaka ile birleştirilmiş homojen tabaka ve yarım düzlemin kaymalı temas problemini araştırmışlardır. Kucuksucu ve diğerleri [12] derecelendirilmiş ortotropik yarım düzlem ve değişken profile sahip rijit panç arasındaki sürtünmeli temas problemini araştırmışlardır. Chen ve diğerleri [13] kayma modülünün tabaka eksenine göre değişken bir açı yönünde eksponansiyel olarak değiştiği yarım düzlem ve rijit panç arasındaki sürtünmeli temas problemini ele almışlardır. Adıyaman ve diğerleri [15] iki çeyrek düzlem üzerine oturan fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın sürtünmesiz ve ayrılmalı temas problemini incelemişlerdir. Çömez ve diğerleri [16] iki fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın sürtünmesiz temas problemini incelemişlerdir. Öner ve diğerleri [17] fonksiyonel derecelendirilmiş tabaka ve yarım düzlem arasındaki sürekli temas problemini incelemişlerdir.

Yapılan bu çalışmalara bakıldığında simetrik iki blok aracılığıyla yüklenmiş fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın sürtünmesiz ve ayrılmalı temas probleminin henüz literatürde yer almadığı görülmektedir. Bu çalışmada, söz konusu problemin analitik çözümü yapılarak gerilme, yer değiştirme bileşenleri ve temas uzunluklarına ait elde edilen sonuçlar grafik ve tablolar halinde verilmiştir.

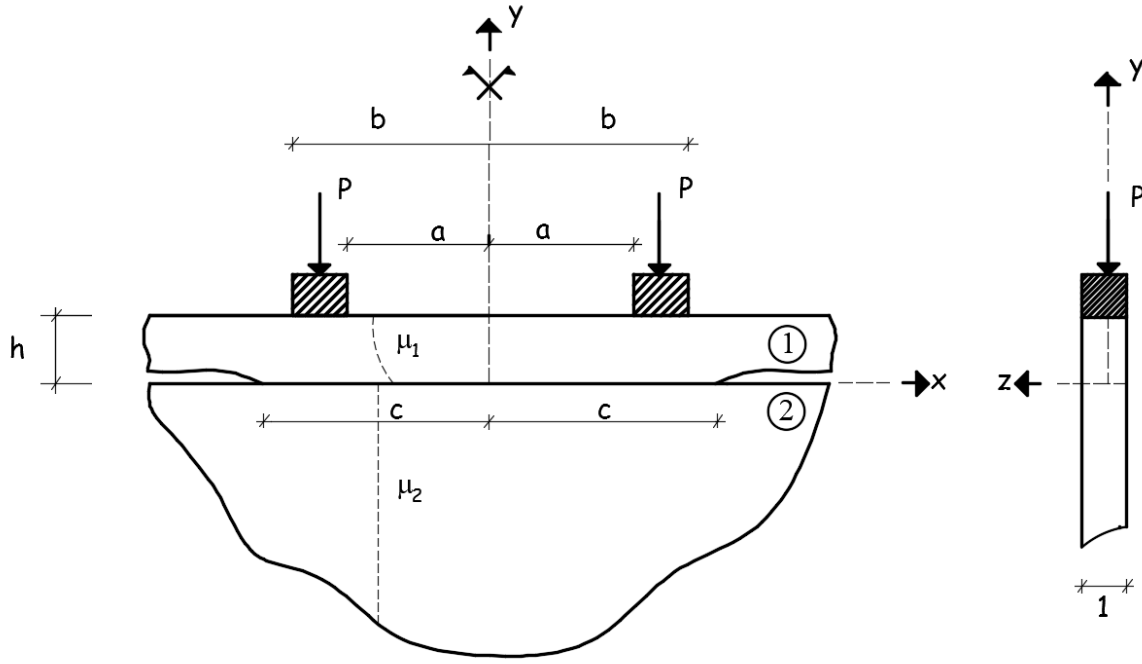
Bu çalışmada; elastik yarım düzlem üzerine oturan simetrik rijit iki dikdörtgen blok aracılığıyla yüklenmiş fonksiyonel derecelendirilmiş bir tabakanın sürtünmesiz ve ayrılmalı temas problemi elastisite teorisine göre incelenmiştir. Fonksiyonel derecelendirilmiş tabakanın yüksekliği sabit ve  $h$ 'dir. Fonksiyonel derecelendirilmiş tabaka için Poisson oranı  $\nu_1$  ve kayma modülü  $\mu_1$  olup  $y$  koordinatına bağlı olarak aşağıdaki gibi değişmektedir.

$$\mu_1(y) = \mu_0 e^{(\gamma y)} \quad (0 \leq y \leq h) \quad (1)$$

Burada,  $\mu_0$  tabakanın alt yüzeyinin kayma modülü,  $\gamma$  ise rijitlik parametresidir..

Elastik yarım düzlemde ise malzeme özellikleri sabit olup Poisson oranı  $\nu_2$  ve kayma modülü ise  $\mu_2$  olarak alınmaktadır. Fonksiyonel derecelendirilmiş tabaka ile bloklar  $(a,b)$  ve  $(-a,-b)$  aralıklarında, tabaka ile yarım düzlem ise  $(-c,c)$  aralıklarında temas halindedirler. Problemden kütle kuvvetlerinin etkisi ihmal edilmiştir. Tabaka  $x$  eksenine boyunca  $(-\infty, \infty)$  aralığında uzanmaktadır. Problemin geometrisi ve yükleme durumu simetrik olduğundan hesapların  $(0, \infty)$  aralığında yapılması yeterlidir.

Problemin çözümünde kullanılacak  $u_i(x,y)$ ,  $v_i(x,y)$  yer değiştirme bileşenleri ve  $\sigma_{xi}(x,y)$ ,  $\sigma_{yi}(x,y)$ ,  $\tau_{xyi}(x,y)$  gerilme bileşenleri elastisitenin temel denklemleri ve Fourier dönüşüm teknikleri kullanılarak aşağıdaki gibi elde edilmiştir.



Şekil 1. Problemin geometrisi ve yükleme durumu

Fonksiyonel derecelendirilmiş tabaka için yer değiştirme ve gerilme ifadeleri:

$$u_1(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^4 A_j e^{(n_j y)} \sin(\alpha x) d\alpha \quad (2)$$

$$v_1(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^4 A_j m_j e^{(n_j y)} \cos(\alpha x) d\alpha \quad (3)$$

$$\frac{\sigma_{x1}(x, y)}{\mu_0} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^4 \frac{A_j}{\kappa_1 - 1} [(3 - \kappa_1) m_j n_j + (\kappa_1 + 1)] e^{(n_j + \gamma)y} \cos(\alpha x) d\alpha \quad (4)$$

$$\frac{\sigma_{y1}(x, y)}{\mu_0} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^4 \frac{A_j}{\kappa_1 - 1} [(3 - \kappa_1) \alpha + (\kappa_1 + 1) m_j n_j] e^{(n_j + \gamma)y} \cos(\alpha x) d\alpha \quad (5)$$

$$\frac{\tau_{xy1}(x, y)}{\mu_0} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^4 A_j [(n_j - \alpha m_j)] e^{(n_j + \gamma)y} \cos(\alpha x) d\alpha \quad (6)$$

Yarım düzlem için yer değiştirme ve gerilme ifadeleri:

$$u_2(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} [B_1 + B_2 y] e^{\alpha y} \cos(\alpha x) d\alpha \quad (7)$$

$$v_2(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[ -B_1 + \left( \frac{\kappa_2}{\alpha} - y \right) B_2 \right] e^{\alpha y} \sin(\alpha x) d\alpha \quad (8)$$

$$\frac{1}{2\mu_2}\sigma_{x2}(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left[\alpha(B_1+B_2y)+\left(\frac{3-\kappa_1}{2}\right)B_2\right]e^{\alpha y}\cos(\alpha x)d\alpha \quad (9)$$

$$\frac{1}{2\mu_2}\sigma_{y2}(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left[-\alpha(B_1+B_2y)+\left(\frac{1+\kappa_2}{2}\right)B_2\right]e^{\alpha y}\cos(\alpha x)d\alpha \quad (10)$$

$$\frac{1}{2\mu_2}\tau_{xy2}(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left[\alpha(B_1+B_2y)-\left(\frac{\kappa_2-1}{2}\right)B_2\right]e^{\alpha y}\sin(\alpha x)d\alpha \quad (11)$$

Yukarıdaki ifadelerde geçen  $\kappa_i$  ( $i=1,2$ ) bir malzeme sabiti olup düzlem şekil değiştirme halinde  $\kappa_i=3-4\nu_i$  şeklindedir.

Tabaka ve yarım düzleme ait bilinmeyen katsayıların ( $A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2$ ) belirlenmesinde kullanılacak olan sınır şartları aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\sigma_{y1}(x,h)=\begin{cases} 0 & 0\leq x\leq a \\ -p_1(x) & a<x<b \\ 0 & b\leq x<\infty \end{cases} \quad (12)$$

$$\tau_{xy1}(x,h)=0 \quad 0\leq x<\infty \quad (13)$$

$$\sigma_{y1}(x,0)=\begin{cases} -p_2(x) & 0\leq x<c \\ 0 & c\leq x<\infty \end{cases} \quad (14)$$

$$\sigma_{y1}(x,0)=\sigma_{y2}(x,0) \quad 0\leq x<\infty \quad (15)$$

$$\tau_{xy1}(x,0)=0 \quad 0\leq x<\infty \quad (16)$$

$$\tau_{xy2}(x,0)=0 \quad 0\leq x<\infty \quad (17)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[v_1(x,0)-v_2(x,0)]=0 \quad 0\leq x\leq c \quad (18)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[v_1(x,h)]=0 \quad a<x<b \quad (19)$$

Bu ifadelerde geçen  $p_1(x)$  blok ve tabaka arasındaki,  $p_2(x)$  ise tabaka ve yarım düzlem arasındaki bilinmeyen temas gerilmelerini göstermektedir. Problemin denge şartları aşağıda verildiği gibidir.

$$\int_a^b p_1(t_1)dt_1 = P \quad \int_{-c}^c p_2(t_2)dt_2 = 2P \quad (20-21)$$

(12-17) ifadeleriyle verilen sınır şartlarının, (2-11) gerilme ve yer değiştirme ifadelerinde yerlerine yazılmasıyla 6 bilinmeyenli 6 adet denklem elde edilmiş, bu denklem sisteminin çözümünden de tabaka ve elastik yarım düzleme ait gerilme ve yer değiştirme ifadelerinde geçen bilinmeyen katsayılar ( $A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2$ ) hesaplanmıştır. Elde edilen katsayıların (18) ve (19) nolu sınır şartlarında yerlerine yazılmasıyla temas gerilmelerinin bilinmeyenler olduğu iki tekil integral denklemden oluşan aşağıda verilen integral denklem sistemi elde edilmiştir.

$$\int_a^b p_1(t_1) \left\{ k_1(x_1, t_1) + \frac{\kappa_1 + 1}{8e^{\gamma h}} \left[ \frac{1}{t_1 + x_1} - \frac{1}{t_1 - x_1} \right] \right\} dt_1 + \int_{-c}^c p_2(t_2) k_2(x_1, t_2) dt_2 = 0 \quad (23)$$

$$\int_a^b p_1(t_1) k_3(x_2, t_1) dt_1 + \int_{-c}^c p_2(t_2) \left\{ k_4(x_2, t_2) + \left( \frac{\kappa_1 + 1}{8} + \frac{\mu_0(\kappa_2 + 1)}{8\mu_2} \right) \left( \frac{1}{t_2 - x_2} \right) \right\} dt_2 = 0 \quad (24)$$

İntegral denklemler bir takım boyutsuz büyüklükler tanımlanarak aşağıdaki gibi boyutsuz hale getirilmiştir.;

$$\int_{-1}^1 \phi_1(r_1) \left\{ \frac{b-a}{2h} k_1(s_1, r_1) + \frac{\kappa_1 + 1}{8\mu_0 e^{\gamma h}} \left[ \frac{1}{r_1 + s_1 + 2\frac{b+a}{b-a}} + \frac{1}{r_1 - s_1} \right] \right\} dr_1 + \frac{c}{h} \int_{-c}^c \phi_2(r_2) k_2(s_2, r_2) dr_2 = 0 \quad (25)$$

$$\frac{b-a}{2h} \int_{-1}^1 \phi_1(r_1) k_3(s_2, r_1) dr_1 + \int_{-1}^1 \phi_2(r_2) \left\{ \frac{c}{h} k_4(s_2, r_2) + \left[ \frac{\kappa_1 + 1}{8} + \frac{\mu_0(\kappa_2 + 1)}{8\mu_2} \right] \frac{1}{r_2 - s_2} \right\} dr_2 = 0 \quad (26)$$

Boyutsuz hale getirilen integral denklemlerin sayısal çözümlerinin yapılabilmesi için aşağıda verilen eşitlikler kullanılarak denklemler bir lineer denklem takımına dönüştürülmüştür.

$$g_1(r_i) = G(r_i) w(r_i) \quad (27)$$

$$w(r_i) = (1 - r_i)^{\alpha_i} (1 - r_i)^{\beta_i} \quad (28)$$

Rijit blok ve fonksiyonel derecelendirilmiş tabaka arasındaki temas gerilmesi iki ucunda singülariteye sahip olduğu için (25) denkleminin indisi (+1)'dir ve  $\alpha=\beta=0.5$  değerine sahiptir. Tabaka ve yarım düzlem arasındaki temas gerilmesi iki uçundan sınırlı olduğu için (26) denkleminin indisi (-1)'dir ve  $\alpha=\beta=-0.5$  değerine sahiptir. [2]

(27) ve (28) nolu ifadeler, integral denklemler ve denge denklemlerinde yerlerine yazıldığında aşağıda verilen lineer denklem takımı elde edilir.

$$\sum_{i=1}^N W_{1i}^N G_1(r_{1i}) \left[ \frac{b-a}{2h} k_1(s_{1k}, r_{1i}) + \left[ \frac{1}{r_{1i} + s_{1k} + 2\frac{b+a}{b-a}} + \frac{1}{r_{1i} - s_{1k}} \right] \frac{\kappa_1 + 1}{8e^{\gamma h}} \right] + \frac{c}{h} \sum_{i=1}^N W_{2i}^N G_1(r_{1i}) k_2(s_{1k}, r_{1i}) = 0 \quad k = 1 \cdots N-1 \quad (29)$$

$$\frac{b-a}{2h} \sum_{i=1}^N W_{1i} G_1(r_{1i}) k_3(s_{2k}, r_{1i}) + \sum_{i=1}^N W_{2i} G_2(r_{2i}) \left\{ \frac{c}{h} k_4(s_{2k}, r_{2i}) + \left[ \frac{\kappa_1 + 1}{8} + \frac{\mu_0(\kappa_2 + 1)}{8\mu_2} \right] \left( \frac{1}{r_{2i} - s_{2k}} \right) \right\} = 0 \quad k = 1 \cdots N+1 \quad (30)$$

$$\frac{b-a}{2h} \sum_{i=1}^N W_{1i} {}^N G_1(r_{1i}) = 1 \quad (31)$$

$$\frac{c}{h} \sum_{i=1}^N W_{2i} {}^N G_2(r_{2i}) = 2 \quad (32)$$

Burada;  $G_1(r_{1i})$  ve  $G_2(r_{2i})$  ( $i=1 \dots N$ ) boyutsuz temas gerilme değerleri ve  $c/h$  boyutsuz temas uzunlukları olmak üzere  $2N+1$  tane bilinmeyene karşılık  $2N+1$  tane denklem bulunmaktadır. Boyutsuz temas uzunluklarına ait  $(c/h)$  değerleri iterasyon yoluyla elde edilmektedir.

### SONUÇLAR

$(b-a)/h$  blok genişliğini,  $(b+a)/(2h)$  blokların simetri ekseninden olan uzaklıklarını,  $\gamma$  non-homojenite parametresini ifade etmektedir. FD (fonksiyonel derecelendirilmiş) tabakanın üst ucundaki ( $y=h$ ) kayma modülü aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$\mu_h = \mu_0 e^{(\gamma h)} \quad (33)$$

$\mu_h/\mu_0$  oranı tabakanın üst ucunun kayma modülünün alt ucundaki kayma modülüne oranını göstermektedir. Bu oranın 1'e eşit olması ( $\mu_h/\mu_0=1$ ) tabakanın malzeme özelliklerinin değişmediği, yani homojen olduğunu gösterir. Bu oran 1'den büyük olursa ( $\mu_h/\mu_0>1$ ) tabakanın alt yüzeyinden itibaren tabaka yüksekliği boyunca rijitliğin arttığını, 1'den küçük olursa ( $\mu_h/\mu_0<1$ ) tabakanın alt yüzeyinden itibaren tabaka yüksekliği boyunca rijitliğin azaldığını gösterir.

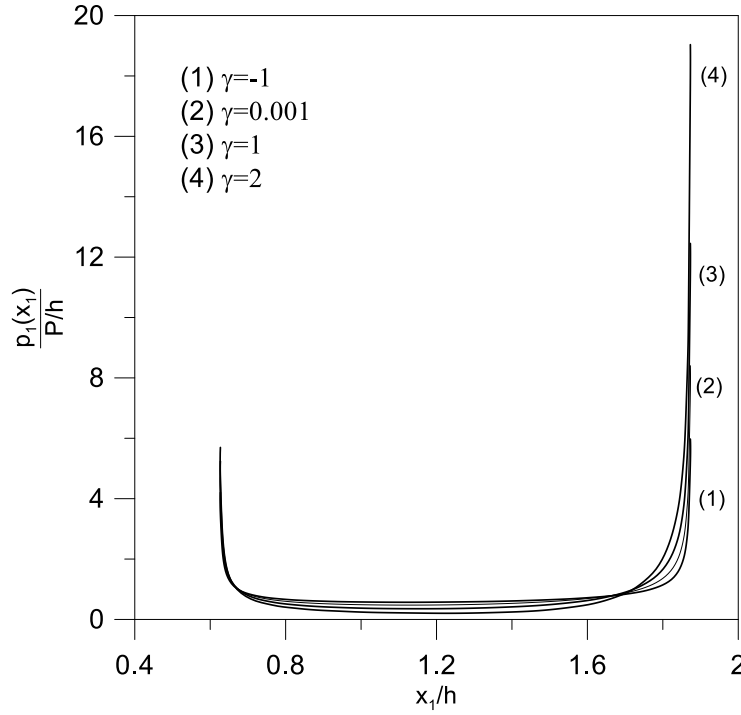
Tablo 1. FD tabaka ve yarım düzlem arasındaki boyutsuz temas uzunluklarının  $\mu_0/\mu_2$  kayma modülü oranı ve  $\gamma$  rijitlik parametresine göre değişimi

$\mu_0/\mu_2$	$c/h$				
	$\gamma=-1$	(Karabulut vd. [18])	$\gamma=0.001$	$\gamma=1$	$\gamma=2$
0.1	2.481250	2.462000	2.463000	2.493250	2.565625
0.2	2.512500	2.511000	2.551500	2.561000	2.665625
0.4	2.568750	2.597200	2.597800	2.684700	2.845000
1	2.718750	2.809900	2.810800	2.972400	3.203125
2	2.912500	3.071700	3.073900	3.315450	3.622656
4	3.187500	3.433300	3.438100	3.764550	4.168750

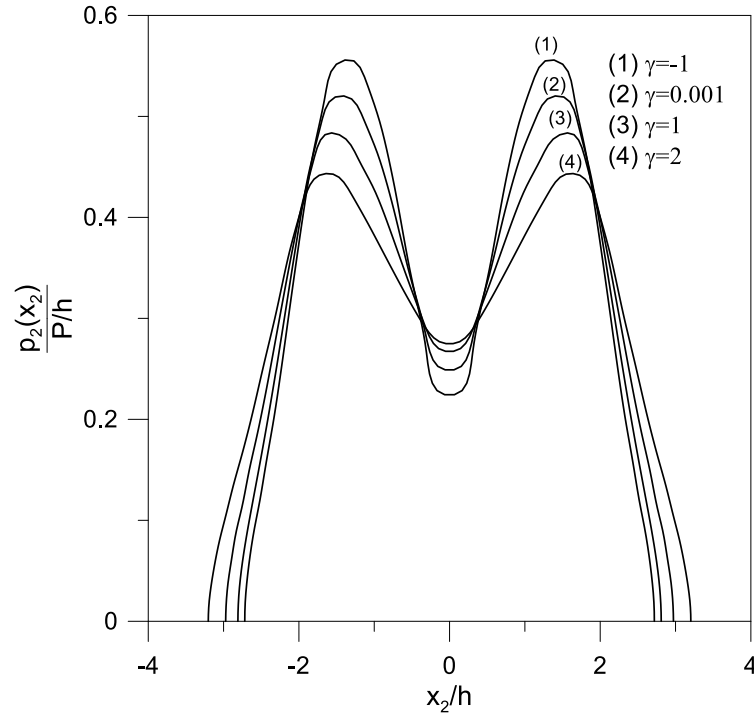
Tablo 1'de FD tabaka ve yarım düzlem arasındaki boyutsuz temas uzunluklarının  $\mu_0/\mu_2$  kayma modülü oranı ve  $\gamma$  rijitlik parametresine göre değişimi gösterilmektedir.  $\gamma$  değerinin çok küçük (0.001) alınması yaklaşık olarak FD tabakanın homojen olması haline karşılık gelmektedir ve [18]'de FD tabakanın homojen olması halinde elde edilen sonuçları ile aynı

olmaktadır. Tablo 1 incelendiğinde  $\gamma$  rijitlik parametresinin değerlerinin artmasıyla  $c/h$  boyutsuz temas uzunlukları değerlerinin arttığı görülmektedir.

Şekil 2’de FD tabaka ve blok arasındaki boyutsuz temas gerilme dağılımlarının  $\gamma$  rijitlik parametresine göre değişimi gösterilmektedir. Şekilden de görülebileceği gibi,  $\gamma$  değerlerinin artmasıyla FD tabaka ve blok arasındaki boyutsuz temas gerilmelerinin sağ ucuna yakın değerleri artarken sol ucuna yakın değerlerinin azaldığı görülmektedir.



Şekil 2. FD tabaka ve blok arasındaki boyutsuz temas gerilme dağılımlarının ( $p_1(x_1)$ )  $\gamma$  rijitlik parametresine göre değişimi ( $(b-a)/h=1.25$ ,  $(b+a)/(2h)=1.25$ ,  $\mu_0/\mu_2=1$ )



Şekil 3. FD tabaka ve yarı düzlem arasındaki boyutsuz temas gerilme dağılımlarının ( $p_2(x_2)$ )  $\gamma$  rijitlik parametresine göre değişimi ( $(b-a)/h=1.25$ ,  $(b+a)/(2h)=1.25$ ,  $\mu_0/\mu_2=1$ )

Şekil 3’de FD tabaka ve yarı düzlem arasındaki boyutsuz temas gerilmesi dağılımının  $\gamma$  rijitlik parametresine göre değişimi verilmektedir. Şekil incelendiğinde,  $\gamma$  değerlerinin artmasıyla FD tabaka ve yarı düzlem arasındaki boyutsuz temas gerilmelerinin maksimum değerinin azaldığı ve  $c/h$  boyutsuz temas uzunluklarının arttığı görülmektedir.

#### KAYNAKLAR

- [1] S.K. Chan, I.S. Tuba, A finite element method for contact problems of solid bodies-part 1: theory and validation, *International Journal of Mechanical Sciences*, 13 (1971) 615-625. doi:10.1016/0020-7403(71)90032-4.
- [2] F. Erdoğan, G. Gupta, On the numerical solution of singular integral equations, *quarterly of Applied Mechanics*, 29 (1972) 525-534. doi:10.1007/978-94-017-2260-8\_7.
- [3] H.-S. Jing, M.-L. Liao, An improved finite element scheme for elastic contact problems with friction, *Computers and Structures*, 35 (1990) 571-578. doi:10.1016/0045-7949(90)90385-F.
- [4] J.A. Gorridio, A. Foces, F. Paris, BEM applied to receding contact problems with friction, *Mathematical and Computer Modeling*, 15 (1991) 143-154. doi:10.1016/0895-7177(91)90060-K.
- [5] S. El-Borgi, R. Abdelmoula, L. Keer, A receding contact problem between a functionally graded layer and a homogeneous substrate, *International Journal of Solids and Structures*, 43 (2006) 658-674. doi:10.1016/j.ijsolstr.2005.04.017.



- [6] M. Rhimi, S. El-Borgi, W. Ben Said, F. Ben Jemaa, A receding contact axisymmetric problem between a functionally graded layer and a homogeneous substrate, *International Journal of Solids and Structures*, 46 (2009) 3633-3642. doi:10.1016/j.ijsolstr.2009.06.008.
- [7] H.J. Choi, On the plane contact problem of a functionally graded elastic layer loaded by a frictional sliding flat punch, *Journal of Mechanical Sciences and Technology*, 23 (2009) 2703-2713. doi: 10.1007/s12206-009-0734-4.
- [8] S. Dağ, T. Apatay, M.A. Guler, M. Gulgeç, A surface crack in a graded coating subjected to sliding frictional contact, *Engineering Fracture Mechanics*, 80 (2012) 72-91. doi:10.1016/j.engfracmech.2011.02.013.
- [9] M.A. Guler, Y. Alina, S. Adibnazari, On the contact mechanics of a rolling cylinder on a graded coating. part 2: numerical results, *Mechanics of Materials*, 66 (2013) 134-159. doi:10.1016/j.mechmat.2013.07.014.
- [10] Y. Alina, M.A. Guler, S. Adibnazari, On the contact mechanics of a rolling cylinder on a graded coating. part 1: analytical formulation, *Mechanics of Materials*, 68 (2013) 207-216. doi:10.1016/j.mechmat.2013.08.010.
- [11] S.J. Chidlow, M. Teodorescu, Sliding contact problems involving inhomogeneous materials comprising a coating-transition layer-substrate and a rigid punch, *International Journal of Solids and Structures*, 51 (2014) 1931-1945. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2014.02.003.
- [12] A. Kucuksucu, M.A. Guler, A. Avcı, Mechanics of sliding frictional contact for a functionally graded orthotropic half-plane, *Acta Mechanica*, 226 (2015) 333-3374. doi:10.1007/s00707-015-1374-7.
- [13] P. Chen, S. Chen, J. Peng, Frictional contact of a rigid punch on an arbitrarily oriented gradient half plane, *Acta Mechanica*, 226 (2015) 4207-5221. doi:10.1007/s00707-015-1457-5.
- [14] İ. Çömez, Contact problem for a functionally graded layer intended by a moving punch, *International Journal of Mechanical Sciences*, 100 (2015) 339-344. doi: 10.1016/j.ijmecsci.2015.07.006.
- [15] G. Adıyaman, A. Birinci, E. Öner, M. Yaylacı, A receding contact problem between a functionally graded layer on two homogeneous quarter planes, *Acta Mechanica*, 227 (2016) 1753-1766. doi:10.1007/s00707-016-1580-y.
- [16] İ. Çömez, S. El-Borgi, V. Kahya, R. Erdöl, Receding contact problem for two-layer functionally graded media intended by a rigid punch, *Acta Mechanica*, 227 (2016) 2493-2504. doi:10.1007/s00707-016-1648-8.
- [17] E. Öner, G. Adıyaman, A. Birinci, Continuous contact problem of a functionally graded layer resting on an elastic half-plane, *Archives of Mechanics*, 69 (2017) 53-73.
- [18] P.M. Karabulut, G. Adıyaman, E. Öner, A. Birinci, Yarım düzlem üzerine oturan elastik tabakanın sürtünmesiz ve ayrılmalı temas problemi, *19. Ulusal Mekanik Kongresi*, Trabzon, Türkiye, 2015: s. 662-672.